Poglavlje 1

Vektori i analitička geometrija

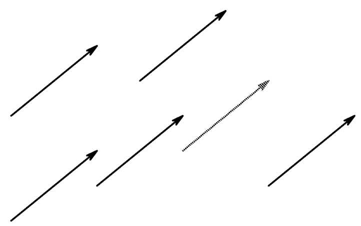
1.1 Vektori - uvodni pojmovi

Definicija 1.1.1 *Dužinu* $\overline{AB}$ *zovemo* ***orijentirana dužina*** *ako ima uređene rubne točke, tj. zna se koja je početna, a koja krajnja točka. Označavamo je s* $\overrightarrow{AB}$.

Dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{CD}$ *su* ***ekvivalentne*** *ako dužine* $\overline{AD}$ *i* $\overline{BC}$ *imaju zajedničko polovište.*

Vektor *je klasa ekvivalencije usmjerenih dužina, a označavamo ih slovima* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$.

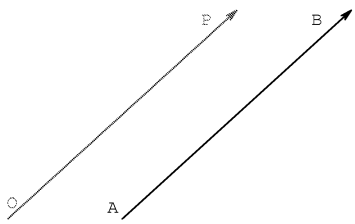
Napomena: Kada govorimo o vektoru, često mislimo ne na klasu svih međusobno ekvivalentih usmjerenih dužina, već na **samo jednog predstavnika te klase**, tj. na konkretnu usmjerenu dužinu. Na primjer, usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AB}$ zovemo vektorom $\overrightarrow{AB}$, a pritom mislimo na **sve** usmjerene dužine koje su ekvivalentne usmjerenoj dužini $\overrightarrow{AB}$. U tom smislu ćemo pisati $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (vidi sliku 1.1.).



Slika 1.1: Vektor je klasa međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina, a za predstavnika možemo uzeti bilo koju od njih.

Dalje, možemo odabrati proizvoljnu, ali fiksnu točku prostora (označimo je s O) takvu da je za svaki vektor ona početna točka, tj. takvu da se svaki vektor može prikazati u obliku $\overrightarrow{OP}$, gdje je P završna točka vektora (vidi sliku 1.2.).

Osim toga, za **svaki** vektor $\vec{a}$ i **svaku** zadanu točku prostora A postoji točka B tako da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



Slika 1.2: Za predstavnika svakog vektora možemo odabrati vektor kojem je početna točka uvijek fiksna točka O.

Definicija 1.1.2 ***Duljina*** *ili* ***modul*** *vektora* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *definira se kao dujina dužine* $\overline{AB}$*, tj. kao duljina bilo kojeg predstavnika tog vektora. Pišemo:* $|\vec{a}|$*. Vektore duljine 1 zovemo* ***jedinični vektori****.*

Za vektore čiji predstavnici leže na istom ili na paralelnim pravcima kažemo da su istog ***smjera****.*

Za dva vektora koji leže na istom pravcu ili paralelnim pravcima kažemo da su ***kolinearni****.*

Za svaka dva kolinearna vektora $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *možemo pronaći predstavnike* $\overline{OA}$ *i* $\overline{OB}$*, gdje je* O *fiksna točka prostora. Ako se točke* A *i* B *nalaze s iste strane očke* O*, kažemo da su ti vektori* ***iste orijentacije****. Ako to nije slučaj, kažemo da su vektori* ***suprotne orijentacije****.*

Nul-vektor *je vektor koji ima duljinu nula, tj. vektor koji ima početak i kraj u istoj točki. Smjer i orijentacija ovog vektora se ne definiraju. Nul-vektor označavamo s* $\vec{0}$*, a njegovi predstavnici su sve usmjerene dužine oblika* $\overrightarrow{AA}$*, tj. sve takve usmjerene dužine kojima se početna i krajnja točka podudaraju.*

Za zadani vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *možemo definirati vektor* $-\vec{a} := \overrightarrow{BA}$*. To je vektor kojeg zovemo* ***suprotni vektor*** *i koji ima istu duljinu i smjer, ali suprotnu orijentaciju od zadanog vektora.*

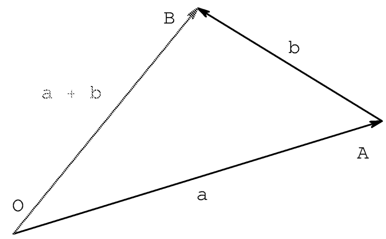
Napomena: Svaki vektor jedinstveno je određen duljinom, smjerom i orijentacijom.

1.2 Zbrajanje vektora i množenje skalarom

1.2.1 Zbrajanje vektora

Definicija 1.2.1 ***Zbroj vektora*** $\vec{a}+\vec{b}$ *je vektor koji se dobije na sljedeći način: odaberimo proizvoljnu fiksnu točku* O *i nađimo točke* A *i* B *takve da je* $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ *i* $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$*. Vektor* $\overrightarrow{AB}$ *zovemo zbrojem vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*. Dakle, zbroj vektora definira se kao vektor koji ima početak u početnoj točki prvog vektora, a kraj u krajnjoj točki drugog vektora u zbroju (vidi sliku 1.3.). Ovu definiciju zovemo* ***pravilo trokuta****. Zapisano simbolički, zbrajanje glasi:* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$*.*

Napomena: Nul-vektor $\vec{0}$ predstavljamo usmjerenom dužinom $\overrightarrow{PP}$, gdje je P točka prostora. Ovo nam govori kako se zbraja proizvoljni vektor s nul-vektorom: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{OA}$ i obratno: $\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$, što znači da nul-vektor djeluje kao neutralni element za operaciju zbrajanja vektora.



Slika 1.3: Pravilo trokuta

Svojstva zbrajanja:

(a) asocijativnost: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(b) postojanje neutralnog elementa: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

(c) postojanje suprotnog vektora: za svaki vektor $\vec{a}$ postoji **jedinstveni** vektor $\vec{b}$ takav da vrijedi

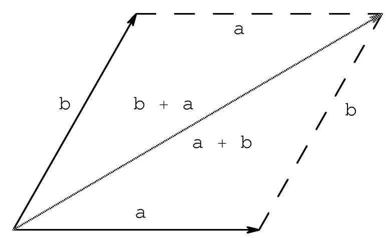
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{0}$.

Takav vektor zovemo **suprotni vektor** i označavamo ga s $-\vec{a}$. Ako je vektor $\vec{a}$ zadan nekom usmjerenom dužinom $\overrightarrow{AB}$, onda očito vrijedi $\overrightarrow{BA}$ (jer tada po definiciji zbrajanja vektora imamo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$)

(d) komutativnost: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Napomena: Suprotni vektor iz gornje definicije odgovara suprotnom vektoru iz definicije sa stranice 1. Naime, ako uzmemo vektor koji je jednake duljine kao zadani vektor i ima isti smjer, ali suprotnu orijentaciju, očito je da će rezultat zbrajanja tih dvaju vektora biti upravo nul-vektor.

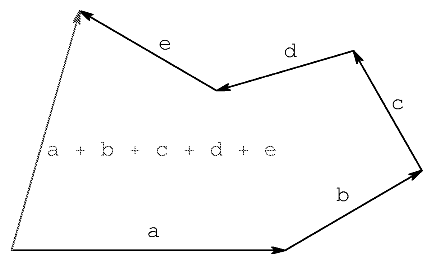
Komutativnost zbrajanja slikovno je izraženo **pravilom paralelograma**:



Slika 1.4: Pravilo paralelograma

Naime, možemo krenuti od vektora $\vec{a}$ i njemu dodati vektor $\vec{b}$. Dobiva se dijagonala zamišljenog paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ - to je vektor $\vec{a} + \vec{b}$. No, možemo poći od vektora $\vec{b}$, kojem dodajemo $\vec{a}$, čime dolazimo do iste dijagonale, ali ona ovog puta daje čini vektor $\vec{b} + \vec{a}$, što očito dokazuje komutativnost zbrajanja vektora. Pravilo paralelograma govori da za izračunavanje zbroja $\vec{a} + \vec{b}$ nije potrebno položiti početak vektora $\vec{b}$ na kraj vektora $\vec{a}$, već **oba** vektora mogu imati početak u istoj točki, a zbroj je vektor predstavljen zamišljenom dijagonalom paralelograma kojeg vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Napomena: Činjenica da je zbrajanje vektora asocijativno, omogućuje da primijenimo **pravilo mnogokuta**: ako zbrajamo više vektora, možemo to učiniti kao na slici 1.5.



Slika 1.5: Pravilo mnogukuta

1. Dokažite svojstva (a) i (c) zbrajanja vektora (koristeći definiciju za zbroj).

1.2.2 Množenje vektora skalarom

Vektor možemo mnnožiti **skalarom**, tj. zadanim realnim brojem.

Definicija 1.2.2 *Za skalar λ i vektor $\vec{a}$ definiramo **produkt** $\lambda \cdot \vec{a}$ kao vektor koji ima sljedeća svojstva:*

(a) ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\lambda = 0$, onda je $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$

(b) ako je $\vec{a} \neq 0$ i $\lambda = 0$, onda je $\lambda \cdot \vec{a}$ vektor određen sljedećim:

1. *duljina: $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$*
2. *smjer: jednak smjeru vektora $\vec{a}$*
3. *orijentacija: ako je $\lambda < 0$, orijentacija je suprotna orijenaciji vektora $\vec{a}$, a ako je $\lambda > 0$, orijentacija je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$.*

Svojstva množenja vektora skalarom:

(a) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

(b) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

(c) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$

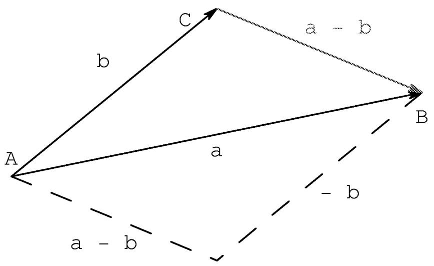
(d) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Definicija 1.2.3 *Pod oduzimanjem dvaju vektora podrazumijevamo zbrajanje vektora sa suprotnim vektorom drugog sumanda: za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$* ***razlika vektora*** *$\vec{a}-\vec{b}$ definira se kao $\vec{a}+(-\vec{b})$.*

Napomena: Ova definicija se može jednostavno interpretirati ovako: ako želimo izračunati razliku vektora $\vec{a}-\vec{b}$, dovoljno je da oba vektora imaju zajedničku početnu točku - tada je razlika tih vektora vektor kojem je početna točka u krajnjoj točki vektora $\vec{b}$, a krajnja točka u krajnjoj točki vektora $\vec{a}$. Da dokažemo tvrdnju, koristimo se sljedećim odabranim predstavnicima vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$: $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Tada je

$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

Tvrdnja se može dokazati i slikom:



Slika 1.6: Oduzimanje vektora

Napomena: Iz definicije množenja vektora skalarom vidimo da se nul-vektor ponaša kao i nula u skupu realnih brojeva. Osim toga, sa slike 1.6. se vidi da je vektor $\vec{a}-\vec{b}$ dan kao vektor određen kraćom dijagonalom paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako se sjetimo da je $\vec{a}+\vec{b}$ odreqđen duljom dijagonalom istog paralelograma, imamo jednostavno grafičko pravilo za zbrajanje i oduzimanje vektora.

1.2.3 Linearna kombinacija vektora

Definicija 1.2.4 ***Linearna kombinacija*** *vektora $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ i skalara $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ je vektor $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}$. Skalare $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ zovemo* ***koeficijenti*** *linearne kombinacije. Dalje, kažemo da smo vektor $\vec{a}$ napisali kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$.*

Kažemo da su vektori $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ ***linearno zavisni*** *ako postoje skalari $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ (koji nisu svi nula!) takvi da je $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$. Ako takvi skalari ne postoje, tj. ako $\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$ nužno povlači $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, kažemo da su vektori $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$* ***linearno nezavisni****.*

Primjer 1 Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je E sjecište dijagonala, F polovište stranice BC, a E polovište stranice CD. Izračunajte vektore $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{FD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

Rješenje: Očito vrijedi:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$
Dalje, računamo preostala tri vektora:
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Primjer 2 Neka je dana dužina AB i točka C na pravcu kroz A i B, te proizvoljna toèka O. Izrazite $\overrightarrow{OC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ ako je $|\overline{AC}| = 2|\overline{BC}|$ i:

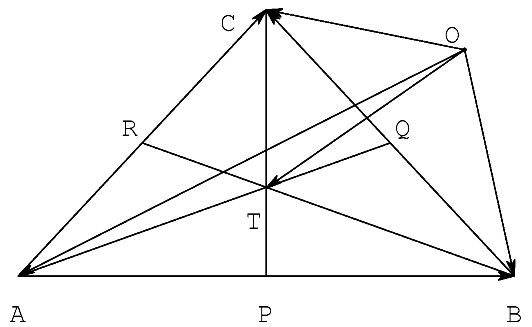
(a) $C \in \overline{AB}$

(b) $C \notin \overline{AB}$.

Rješenje: Uputa: napišite $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$, gdje je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Koristeći $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ iz te jednakosti izrazite $\overrightarrow{AC}$.

Primjer 3 Neka je T težište trokuta ABC, a O prozvoljna toèka. Izrazite vektor $\overrightarrow{OT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$.

Rješenje:



Slika 1.7: Težište trokuta

Sa slike očito slijedi:
$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$
$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$
$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$
Zbrajanjem ovih jednakosti dobije se
$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) = \vec{0}$, tj.
$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (*)$.
Želimo pokazati da je $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$. U tu svrhu računamo $\overrightarrow{TA}$, a pritom koristimo činjenicu da težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 (računajući od vrha):
$\overrightarrow{TA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{QA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.

Analogno se dobiva
$\overrightarrow{TB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ i
$\overrightarrow{TC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Zbrajanjem ove tri jednakosti daju $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$, što uvrštanjem u jednakost $(*)$ daje
$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

1.3 Skalarni i vektorski produkt vektora

1.3.1 Skalarni produkt vektora

Definicija 1.3.1 ***Skalarni produkt*** *dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ označva se s $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i definira na sljedeći način: ako su oba vektora različita od $\vec{0}$, onda je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako je bar jedan od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, jednak nul-vektoru, onda definiramo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Pod ***kutem između vektora*** *$\vec{a}$ i $\vec{b}$ smatramo kut kojeg zatvaraju zrake koje određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kad imaju zajednički početak.*

Napomena: Iz definicije se vidi da je skalarni produkt vektora *broj*, a ne vektor. Dalje, ako je $\vec{b} = \vec{a}$, formula za skalarni produkt postaje $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos 0$, što skraćeno pišemo

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

što znači da je $\vec{a}^2 \geq 0$ za svaki vektor $\vec{a}$, a $\vec{a}^2 = \vec{0}$ samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$ (vrijedi i obrat).

Svojstva skalarnog produkta:

(a) komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(b) distributivnost: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(c) homogenost: $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(d) pozitivna definitnost: $\vec{a}^2 \geq 0$ i $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Napomena: Skalarni produkt vektora daje nam koristan kriterij za ispitivanje ortogonalnosti vektora (kojeg ćemo operabilinije koristiti tek nakon što uvedemo koordinatni zapis vektora.). Naime, ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno ortogonalni, onda je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (jer jer tada $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$). S druge strane, ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, onda je ili neki od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, jednak nul-vektoru, ili su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno ortogonalni.

Primjer 1 Koji kut zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ međusobno ortogonalni?

Rješenje:

Činjenicu da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni pišemo preko skalarnog produkta:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
$(\vec{m} + 2\vec{n}) \cdot (5\vec{m} - 4\vec{n}) = 0$
$5\vec{m}^2 + 10\vec{n}\vec{m} - 4\vec{m}\vec{n} - 8\vec{n}^2 = 0$ (distributivnost, komutativnost i $\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2$)
$5|\vec{m}|^2 + 6\vec{m}\vec{n} - 8|\vec{n}|^2 = 0$ ($\vec{m}$ i $\vec{n}$ su jedinični: $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$)
$5 + 6\cos\varphi - 8 = 0$ (φ je kut između vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$)
$\cos\varphi = -\frac{1}{2}$,
odakle slijedi da je $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Primjer 2

Zadano je $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Izračunajte $|\vec{a} + \vec{b}|$.
Rješenje: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\vec{b}$
Slično proizlazi
$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}$, pa zbrajanjem tih jednakosti imamo
$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$, odakle uvrštavanjem odmah slijedi rješenje:
$|\vec{a} + \vec{b}| = 20$.
Zadatak ima i geometrijsku interpretaciju: nađi kraću dijagonalu paralelograma kojem su duljine stranica 11 i 23, a duljina duže dijagonale iznosi 30.

1.3.2 Vektorski produkt vektora

Definicija 1.3.2 ***Vektorski produkt*** *dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor kojeg označavamo s $\vec{a} \times \vec{b}$, a u slučaju da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni definiran je s:*

1. *duljina: modul vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ jednak je površini paralelograma razapetog s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. $|\vec{a} \times \vec{b}| := |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$, gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$*
2. *smjer: $\vec{a} \times \vec{b}$ je ortogonalan na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. ortogonalan je i $\vec{a}$ i $\vec{b}$*
3. *orijentacija: uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c})$ čini* ***desni sustav****: zakretanje vektora $\vec{a}$ u vektor $\vec{b}$ za kut φ između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ promatrano iz krajnje točke vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ ima smjer suprotan smjeru kretanja kazaljke na satu.*

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, definiramo da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Napomena: Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, onda razapinju degenerirani paralelogram koji ima površinu nula, što znači da je $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$. No, znamo da je nul-vektor jedini vektor duljine nula, odakle i definicijski zahtjev da je vektorski produkt kolinearnih vektora upravo nul-vektor.

Svojstva vektorskog produkta:

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako i samo ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni. Posebno je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ za svaki vektor $\vec{a}$

(b) antikomutativnost: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(c) homogenost: $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda \times (\vec{a} \cdot \vec{b})$

(d) distributivnost: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Napomena: Kombinacija skalarnog i vektorskog produkta daje nam korisnu formulu za volumen paralelepipeda razapetog trima vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ čine bazu paralelepipeda, pa je njena površina (zbog definicije vektorskog produkta) upravo jednaka upravo $B = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Ostaje odrediti visinu paralelepipeda v (volumen računamo po formuli $V = B \cdot v$). Znamo da je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ortogonalan na ravninu razapetu s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pa je visina upravo jednaka ortogonalnoj projekciji vektora $\vec{c}$ na pravac vektora $\vec{a} \times \vec{b}$, što znači da imamo $v = \cos\psi \cdot |\vec{c}|$, gdje je ψ kut između vektora $\vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$. Sada je $V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\psi = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Međutim, nema garancije da će ovaj broj biti pozitivan, pa da to osiguramo pišemo znak realne apsolutne vrijednosti i dobivamo formulu za volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$:

$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

Točnije, ako uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ čini desni sustav, onda nema potrebe za znakom apsolutne vrijednosti, jer je broj $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ u tom slučaju pozitivan.

Definicija 1.3.3 *Za tri vektora kažemo da su* ***komplanarni*** *ako leže u istoj ravnini. Drugim riječima, tri su vektora komplanarna ako i samo ako neki od njih možemo prikazati kao linearnu kombinaciju preostalih dvaju, tj. ako su oni linearno zavisni.*

Napomena: Formula za volumen paralelepipeda daje nam operabilno pravilo pomoću kojeg možemo utvrditi jesu li neka tri vektora komplanarna. Naime, ako su zadana tri vektora komplanarna, onda je volumen paralelepipeda koji oni razapinju jednak nuli. No, vrijedi i obrat: ako je volumen paralelepipeda kojeg razapinju tri vektora jednak nuli, onda su ti vektori nužno komplanarni, tj. linearno su zavisni.

1.4 Koordinatizacija

1.4.1 Vektori u ravnini

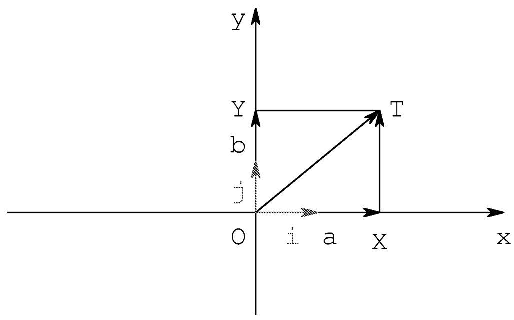
Neka je u ravnini zadan pravokutni koordinatni sustav xOy. Uočimo na osi x jedinični vektor koji ima početak u ishodištu, a kraj u točki $(1, 0)$ i označimo ga s $\vec{i}$, a na osi y uočimo jedinični vektor koji ima početak u ishodištu i kraj u $(0, 1)$, te ga označimo s $\vec{j}$ (vidi sliku 1.8.). Ova dve vektora zovemo **koordinatnim vektorima**.

Promatramo sada vektor $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$, gdje je T dana koordinatama (a, b). Označimo s X i Y redom ortogonalne projekcije točke T na x i y-os.

Sada je $\vec{v} = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XT} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Očito se **svaki** vektor s početnom točkom u ishodištu može prikazati kao linearna kombinacija koordinatnih vektora. Pritom koficijente te linearne kombinacije zovemo **koordinatama vektora**.

No, to je moguće i za sve druge vektore, dakle i one koji nemaju početak u O: neka je dan vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$, gdje su točke $T_1 = (x_1, y_1)$ i $T_2 = (x_2, y_2)$ dane pravokutnim koordinatama. Sada je



Slika 1.8: Koordinatizacija vektora u ravnini

$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1O} + \overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})$, tj.
$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$.

Napomena: Svaki vektor u ravnini može se prikazati kao linearna kombinacija koordinatnih vektora. Može se pokazati: koordinatni prikaz vektora **ne ovisi** o izboru orijentirane dužine - predstavnika vektora od koje smo krenuli. To znači sljedeće: ako krenemo od neke linearne kombinacije koordinatnih vektora, onda je jasno da govorimo o **svim** orijentiranim dužinama iste klase, tj. o nekom vektoru. Međutim, i dalje najčešće crtamo onog predstavnika koji ima početak u ishodištu koordinatnog sustava.

Jednakost vektora, zbrajanje vektora i množenje skalarom

Iz gornje napomene proizlazi jednostavan **kriterij jednakosti** dvaju koordinatno zadanih vektora: vektori $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_2\vec{j}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ su **jednaki** ako i samo ako je $a_x = b_1$, $a_2 = b_2$.

Koordinatizacija vektora koristi se jer je tako mnogo lakše računati s vektorima. Lako se vidi da za zadane vektore $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_2\vec{j}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ te skalar λ vrijedi:
$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j}$
$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_2\vec{j}$.

Modul vektora

Zanima nas formula za modul koordinatno zadanog vektora: neka je dan vektor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Ako $\vec{v}$ nacrtamo s predstavnikom koji početak ima u ishodištu, jasno je da će biti
$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Linearna zavisnost

Dalje, za vektore zadane koordinatama želimo vidjeti koji uvjet moraju zadovoljavati koordinate vektora da bi oni bili linearno zavisni: neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dani s $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_2\vec{j}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$. Linearna nezavisnost znači da $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$

povlači $\lambda = \mu = 0$ za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ako raspišemo jednakost $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$ preko koordinata, dobivamo

$\lambda(a_x\vec{i} + a_2\vec{j}) + \mu(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = \vec{0}$, tj.

$(\lambda a_x + \mu b_1)\vec{i} + (\lambda a_2 + \mu b_2)\vec{j} = \vec{0}$, odakle zbog očite linearne nezavisnosti vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ nužno slijedi

$$\begin{aligned} \lambda a_x + \mu b_1 &= 0 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ovaj sustav (kojeg rješavamo po nepoznanicama λ i μ) ima očito rješenje $(0,0)$ i ono je jedinstveno ako je $\begin{vmatrix} a_x & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (Cramerovo pravilo!). Dakle, ako želimo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu linearno zavisni (tj. da postoje i druga rješenja gornjeg sustava), dovoljno je da zahtijevamo da bude $\begin{vmatrix} a_x & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. Dobiva se $a_x b_2 = b_1 a_2$, što daje

$$a_x : b_1 = a_2 : b_2,$$

i to je uvjet kojeg moraju zadovoljavati koordinate dva vektora da bi bili linearno zavisni. Dva vektora koji zadovoljavaju ovaj uvjet zovemo **kolinearnima**. Dakle, vrijedi

linearna zavisnost (*kolinearnost*) $\Leftrightarrow \frac{a_x}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$

Skalarni produkt i kut između vektora

Za dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadana koordinatama ($\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$) računamo skalarni produkt, uz korištenje činjenice da su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični i ortogonalni, pa je $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, te $\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$ i $\vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1$:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = a_1b_1\vec{i}^2 + a_2b_1\vec{j} \cdot \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \cdot \vec{j} + a_2b_2\vec{j}^2$, tj.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$,

i to je formula za skalarni produkt dvaju koordinatno zadanih vektora u ravnini. Formula kaže da je skalarni produkt dvaju vektora jednak zbroju umnožaka odgovarajućih koeficijenata tih vektora.

Odvadje odmah izlazi uvjet ortogonalnosti dvaju (ne-nul) vektora. Naime, znamo da je ortogonalnost ekvivalentna svojstvu da je skalarni produt jednak nuli, pa imamo sljedeći uvjet:

$\vec{a}$ i $\vec{b}$ su ortogonalni $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

Napomena: Znamo da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$, gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Postavlja se pitanje: možemo li izračunati ovaj kut poznavajući koordinate vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$? Odgovor daje sljedeća formula (koja vrijedi samo ako je $|\vec{a}| \neq 0$ i $|\vec{b}| \neq 0$, tj. samo ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu jednaki $\vec{0}$):

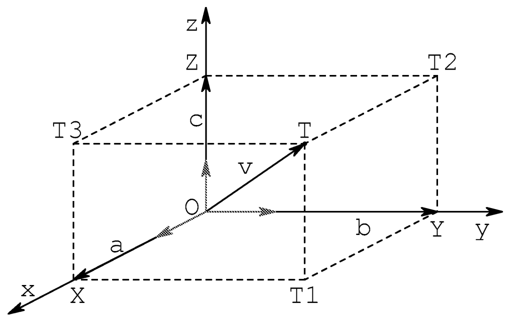
$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, tj. (uz korištenje formule za modul i skalarni produkt)

$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$.

1.4.2 Vektori u prostoru

Neka je u prostoru zadan pravokutni koordinatni sustav s tri u parovima okomite osi x, y i z. Uočimo na osi x jedinični vektor koji ima početak u ishodištu, a kraj u točki $(1,0,0)$ i označimo ga s $\vec{i}$, na osi y jedinični vektor s početkom u ishodištu i krajem u $(0,1,0)$ i ga označimo s $\vec{j}$, a na osi z jedinični vektor s početkom u ishodištu i krajem u $(0,0,1)$ i ga označimo s $\vec{k}$. Ova tri vektora zovemo **koordinatnim vektorima**.

Želimo vidjeti može li se vektor $\vec{v}$ (kojem je početak u ishodištu, a kraj u točki $T=(a,b,c)$), izraziti kao linearna kombinacija koordinatnih vektora. Uz oznake kao na slici 1. 10. imamo
$\vec{v} = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{T_1T} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$



Slika 1.9: Koordinatizacija vektora u prostoru

Slično kao prije, može se pokazati da se svaki vektor u prostoru (a ne samo onaj koji ima početak u ishodištu) može prikazati kao linearna kombinacija koordinatnih vektora, te vrijedi analogan kriterij jednakosti dvaju vektora.

Jednakost vektora, zbrajanje vektora i množenje skalarom

Također, lako se vidi da vrijede slične formule za jednakost i zbrajanje dva koodinatno zadana vektora, kao i množenje vektora skalarom: za dane vektore $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i skalar λ vrijedi

$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$

$\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{i} + \lambda a_2\vec{j} + \lambda a_3\vec{k}.$

Modul vektora

Modul vekotora $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ dan je s
$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

Linearna zavisnost dva vektora

Ovdje razlikujemo linearnu zavisnost dva vektora (kolinearnost) i linearnu zavisnost tri vektora (komplanarnost).

Po analogiji sa uvjetom zavisnosti dva vektora u ravnini, možemo zaključiti da su dva vektora u prostoru $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ linearno zavisni ako i samo ako vrijedi:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3.$$

Ostaje pitanje linearne nezavisnosti tri vektora u prostoru, tj. komplanarnosti tri vektora. Ovdje možemo provesti isti postupak kao i u slučaju dva vektora u ravnini. Međutim, jednostavnije je koristiti uvjet koji proizlazi iz formule za volumen paralelepipeda, što ćemo vidjeti kasnije.

Skalarni produkt vektora i kut između vektora

Skalarani produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dan je s

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$,

iz čega odmah izlazi uvjet ortogonalnosti:

$\vec{a}$ i $\vec{b}$ su ortogonalni $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

i formula za kut φ između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (pod uvjetom da niti $\vec{a}$ niti $\vec{b}$ nije jednak nulvektoru):

$\cos\varphi = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}$.

Primjer 1 Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(-2,-1,1)$, $B(4,-2,2)$ i $C(6,1,3)$. Odredite površinu paralelograma te kut između dijagonala.

Rješenje:

U paralelogramu vrijedi jednakost vektora $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Ako označimo $D = (x,y,z)$, imamo

$(6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} = (4+2)\vec{i} + (-2+1)\vec{j} + (2-1)\vec{k}$

$(6-x)\vec{i} + (1-y)\vec{j} + (3-z)\vec{k} = 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$,

odakle (iz jednakosti vektora s lijeve i s desne strane jednakosti) odmah rješenje: $D = (0,2,2)$.

Vektorski produkt i volumen paralelepipeda

Ako imamo dva koordinatno zadana vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (kao gore), onda je nas zanima kako izgleda formula za vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$. Znamo da je $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$. Medđutim, za račun koji slijedi trebat će nam i svi drugi međuprodukti koordinatnih vektora.

Izračunajmo na primjer $\vec{j} \times \vec{i}$. Prema definiciji vektorskog prodkuta, znamo da je to jedinični vektor ortogonalan na ravninu razapeti vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j}$, pa imamo samo dvije mogućnosti: $\vec{k}$ ili $-\vec{k}$. No, zahtjev da uređena trojka $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{i} \times \vec{j})$ čini desni sustav izbacuje prvu mogućnost, dakle imamo $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$.

1. Izračunajte sve ostale međuprodukte vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

Sada možemo izračunati $\vec{a} \times \vec{b}$. Pritom koristimo svojstva vektorskog produkta (koji nije komutativan!):

$$\vec{a} \times \vec{b} \quad = \quad (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$

$$\begin{aligned}
&= a_1b_2\vec{i}\times\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\times\vec{k} + a_2b_1\vec{j}\times\vec{i} + \\
&\quad + a_2b_3\vec{j}\times\vec{k} + a_3b_1\vec{k}\times\vec{i} + a_3b_2\vec{k}\times\vec{j} = \\
&= a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} = \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k},
\end{aligned}$$

što očito možemo simbolički skraćeno pisati ovako:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

i to je formula za vektorski produkt dvaju koordinatno zadanih vektora.

Sada možemo dati i formulu za volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (tako da $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ čine desni sustav) zadanima koordinatno na standardan način. Znamo da je formula u tom slučaju dana s

$V = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Prema gore izvedenoj formuli za vektorski produkt imamo

$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_z - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$,

što množenjem s vektorom $\vec{c}$ daje

$V = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3$, odnosno

$V = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$,

u čemo prepoznajemo formulu za razvoj determinante matrice reda 3 po prvom retku. Drugim riječima, formula za volumen paralelepipeda razapetog trojkom vektora $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ koja čini desni sustav dana je s

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Linearna zavisnost tri vektora

Sada se vratimo na problem tri komplanarna, tj. linearno zavisna vektora. Već smo rekli da oni određuju degenereirani paralelepiped volumena nula (a vrijedi i obrat). Dakle, imamo jednostavan kriterij za linearnu zavisnost vektora $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$:

$$\textit{linearna zavisnost (komplanarnost)} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Primjer 2 Odredite $x\in\mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a} = (2x-6)\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = (3x-1)\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = (3-8x)\vec{i} + (x-2)\vec{j} - 3x\vec{k}$ budu komplanarni, te u tom slučaju izrazite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rješenje:

Vektori će biti komplanarni ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & 4 & -3 \\ 3x-1 & 2 & 2 \\ 3-8x & x-2 & -3x \end{vmatrix} = 0,$$

odakle dobivamo dva rješenja:

$x_1 = 4$ i $x - 2 = -\frac{3}{11}$.

Pogledajmo kako izgledaju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ za $x = 4$. Dobiva se

$\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = -29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k}$.

Znamo da su ova tri vektora komplanarna, tj. da jedan od njih možemo izraziti kao linearnu kombinaciju prostalih dvaju, uzmimo vektor $\vec{c}$:

$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, tj.

$-29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) + \beta(11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$,

odakle izjednačavanjem koeficijenata uz koordinatne vektore dobivamo

$$\begin{aligned} 2\alpha + 11\beta &= -29 \\ 4\alpha + 2\beta &= 2 \\ -3\alpha + 2\beta &= -12. \end{aligned}$$

Ovaj sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice ima jedinstveno rješenje i ono iznosi $\alpha = 2$, $\beta = -3$, pa je prikaz vektora $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dan s $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Zadaci sa rokova:

1. Pokažite da su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} - 3\vec{k}$ linearno nezavisni i prikažite vektor $\vec{i}$ kao njihovu linearnu kombinaciju.

2. Dokažite da vektori: $\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j} + x\vec{k}, \vec{b} = -4\vec{j} + x\vec{k}, \vec{c} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ za nijedan $x \in \mathbb{R}$ nisu komplanarni!

3. Dokažite da vektori: $\vec{a} = -\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = x\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{c} = x\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$ za nijedan $x \in \mathbb{R}$ nisu komplanarni!

1.5 Točka

Točke u prostoru označavamo velikim latiničnim slovima, a jednoznačno su određene s tri pravokutne koordinate: pišemo $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$ za dvije općenito zadane točke prostora.

Uz točke u prostoru javljaju se dvije važne formule. Prva je formula za udaljenost točaka T_1 i T_2 dana s

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

a druga je formula za polovište $P(x_P, y_P, z_P)$ dužine $\overline{T_1T_2}$, za čije nalaženje se možemo koristiti poznatom činjenicom iz teorije vektora:

$\overrightarrow{T_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{T_1T_2}$,

tj. (nakon izjednačavanja koeficijenata uz koordinatne vektore)

$x_P = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$, $y_P = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)$, $z_P = \frac{1}{2}(z_2 + z_1)$.

Dakle, polovište P dužine $\overline{T_1T_2}$ dano je s

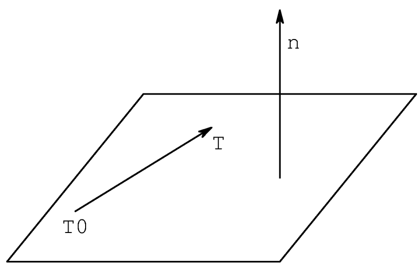
$P(\frac{1}{2}(x_2 + x_1), \frac{1}{2}(y_2 + y_1), \frac{1}{2}(z_2 + z_1))$.

1.6 Ravnina

1.6.1 Jednadžba ravnine

Ravninu možemo zadati pomoću jedne točke (koja se nalazi u ravnini) i jednog vektora, kojeg zovemo **vektor normale**, a označavamo obično sa $\vec{n}$. To je vektor koji je ortogonalan na sve vektore koji dane ravnine (otuda mu i naziv). Naime, svaki vektor u prostoru određuje čitavu familiju međusobno paralelnih ravnina koje su okomite na njega, a dodatno zadana točka fiksira točno jednu ravninu među njima. Ravnine označavamo malim slovima grčkog alfabeta, najčešće s π.

Kako izgleda jednadžba ravnine π zadane točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ koja se u njoj nalazi i vektorom normale $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$? Ravnina je skup svih točaka



Slika 1.10: Ravnina

T koje imaju svojstvo da je vektor $\overrightarrow{T_0T}$ ortogonalan na vektor $\vec{n}$, tj. za koje vrijedi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{T_0T} = 0$, što raspisano po koordinatama daje

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

i to je **jednadžba ravnine** π. Ako raspišemo taj izraz, dobit ćemo

$ax + by + cz + d = 0$, gdje je $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Stoga izraz

$$ax + by + cz + d = 0$$

zovemo **opći oblik jednadžbe ravnine**. Primijetimo da se iz općeg oblika jednadžbe ravnine lako može očitati vektor normale $\vec{n}$ (vidi se da je $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$), kao i dobiti proizvoljna točka ravnine (dovoljno je uzeti bilo koju uređenu trojku (x, y, z) koja zadovoljava jednadžbu ravnine).

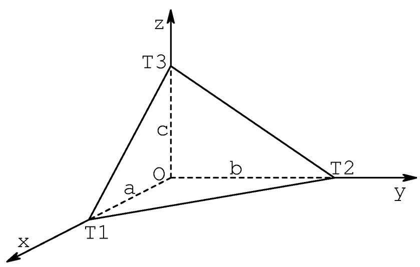
Ravnina prirodno može biti zadana i trima točkama koje se u njoj nalaze: $T_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Da bismo u tom slučaju našli jednadžbu ravnine najlakše je postupiti na sljedeći način: izračunamo vektore $\vec{v_1} = \overrightarrow{T_1T_2}$ i $\vec{v_2} = \overrightarrow{T_1T_3}$, a za vektor normale možemo uzeti vektorski produkt ovih dvaju vektora. Naime, vektor normale je bilo koji vektor ortogonalan na sve vektore ravnine, a to ćemo postići ako postavimo zahtjev da je ortogonalan na bilo koja dva nekolinearna vektora ravnine (u našem slučaju $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$). Koristeći formulu za vektorski produkt imamo

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Sada imamo $\vec{n}$, a kao točku u ravnini možemo uzeti bilo koju od točaka T_1, T_2, T_3. Može se pokazati da se dobiva jednadžba ravnine koja se simbolički može zapisati ovako:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Odavdje možemo lako riješiti i sljedeći problem: nađi jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ i $C(0, 0, c)$. Sa slike vidimo da je su a, b i c zapravo odsječci koje zadana ravnina odsijeca na koordinatnim osima:



Uvrštanjem koordinata točaka A, B i C u formulu za jednadžbu ravnine kroz tri točke imamo

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

odakle razvojem determinante (recimo po drugom retku) dobivamo

$bcx + acy + abz = abc$, što dijeljenjem s abc (uz pretpostavku da niti jedan od brojeva a, b, c nije nula) daje tzv. **segmentni oblik jednadžbe ravnine**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

1.6.2 Međusobni položaj dviju ravnina

Nas će zanimati samo dva specijalna slučaja međusobnog položaja dviju ravnina $a_1x + b_1 + c_1z + d_1 = 0$ i $a_2x + b_2 + c_2z + d_2 = 0$:

(1) ravine su paralelne - jednostavan kriterij za utvrđivanje paralelnosti dviju ravnina dan je uspoređivanjem vektora normale tih ravnina: ako i samo ako su im vektori normale kolinearni, tj. ako vrijedi:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

(2) ravnine su okomite: slično, dvije ravnine su okomite ako i samo ako su im vektori smjera ortogonalni, tj. ako vrijedi

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$

1.7 Pravac

1.7.1 Jednadžba pravca

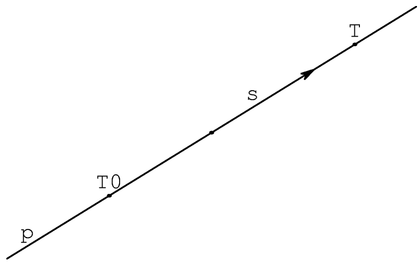
Svaki pravac u prostoru očito je jedinstveno određen jednom točkom (koja se nalazi na pravcu) i jednim vektorom, kojeg zovemo **vektor smjera** i obično označavamo sa $\vec{s}$. Naime, jedan vektor određuje čitavu familiju međusobno paralelnih pravaca, no ako zadamo još i neku točku, onda postoji samo jedan među tim pravcima koji njome prolazi. Pravce u prostoru općenito označavamo malim slovima, najčešće slovom p.

Dakle, za egzaktno određivanje pravca potrebne su nam dvije informacije: točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektor smjera $\vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Postavlja se pitanje: kako izgleda jednadžba pravca P određenog ovim elementima?

Odgovor daje sljedeće razmatranje: pravac je skup svih točaka $T(x, y, z)$ takvih da je vektor $\overrightarrow{T_0T}$ kolinearan s vektorom $\vec{s}$ (vidi sliku 1.12.), tj. sve točke kod kojih vrijedi (pogledaj uvjet kolinearnosti dvaju vektora)

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

i to je tzv. **kanonski oblik jednadžbe pravca**.



Slika 1.11: Pravac

Jednadžbu pravca možemo zapisati i drugačije: ako uzmemo da pravac čine sve točke T takve da je vektor $\overrightarrow{T_0T} = t\vec{s}$ (gdje je T proizvoljni realni parametar), onda uvrštavanjem koordinata i izjednačavanjem koeficijenata uz koordinatne vektore dobivamo

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t \cdot a \\ y - y_0 &= t \cdot b \\ z - z_0 &= t \cdot c, \end{aligned}$$

tj. sljedeći sustav

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot a \\ y &= y_0 + t \cdot b \\ z &= z_0 + t \cdot c, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sve točke koje ga zadovoljavaju leže na pravcu p, a te tri jednakosti zovemo **parametarski oblik jednadžbe pravca**.

Što se događa ako je pravac zadan s dvije točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$? U tom slučaju vektor smjera možemo zapisati kao $\vec{s} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, pa kanonska jednadžba pravca glasi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1}.$$

Postoji još jedan specifičan način zadavanja pravca: pravac možemo zadati kao presjek dviju ravnina. Naime, ako su zadane ravnine

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ i

$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$,

kako naći jednadžbu pravca određenog ovim ravninama? Radi se o pravcu čije točke zadovoljavaju jednadžbe obaju ravnina, tj. o onom pravcu koji se nalazi u obje ravnine. Međutim, to znači da je vektor smjera $\vec{c}$ tog pravca ortogonalan na vektore normale $\vec{n_1}$ i $\vec{n_2}$ tih ravnina, pa ga možemo izračunati kao vektorski produkt tih vektora:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

a kao točku T_0 pravca kojeg tražimo možemo uzeti bilo koju točku koja se nalazi u obje ravnine, tj. bilo koju točku koja zadovoljava gornji sustav jednadžbi. Ova dva elementa dovoljna su da napišemo kanonski oblik jednadžbe traženog pravca.

Primjer 1

Nađite jednadžbu pravca koji leži u $xy-$ravnini, a ujedno i u ravnini danoj jednadžbom $2x - 3y + 4z - 5 = 0$.

Rješenje:

$xy-$ravnina je ravnina $z = 0$, pa je pravac p kojeg tražimo dan presjekom ravnina:

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ 2x - 3y + 4z - 5 &= 0, \end{aligned}$$

što znači da je vektor smjera $\vec{s}$ pravca p dan kao vektorski produkt vektora normale zadanih ravnina. Dakle:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. $\vec{s} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$. Kao točku $T_0(x_0, y_0, z_0)$ s pravca možemo uzeti bilo koju točku koja zadovoljava gornji sustav, pa očito mora biti $z_0 = 0$, što uvrštanjem u donju jednadžbu daje $2x_0 - 3y_0 - 5 = 0$. Uzmimo $y_0 = 3$, odakle izlazi $x_0 = 2$, pa jednadžba pravca glasi $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{0}$.

1.7.2 Međusobni položaj dva pravca

Sada ćemo proučiti kakav može biti međusobni položaj dva pravca

$p_1 \ldots \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ i $p_2 \ldots \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$.

Postoje tri mogućnosti:

(1) pravci su paralelni ako i samo ako su $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ kolinearni, tj. ako i samo ako vrijedi

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

(2) pravci se sijeku: ako se pravci p_1 i p_2 sijeku, mora postojati neka zajednička ravnina $ax + by + cz + d = 0$ koja ih sadrži. To znači da točka (x_1, y_1, z_1) s pravca p_1 mora ležati u toj ravnini (drugim riječima, mora zadovoljavati jednadžbu te ravnine), kao i točka (x_2, y_2, z_2) s pravca p_2. Dakle, mora vrijediti:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d &= 0. \end{aligned}$$

Također, vektori smjera pravaca p_1 i p_2 u tom slučaju moraju biti ortogonalni na vektor normale $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ ravnine, tj. mora vrijediti

$$\begin{aligned} aa_1 + bb_1 + cc_1 &= 0 \\ aa_2 + bb_2 + cc_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ove jednadžbe zajedno s prethodne dvije čine sustav od četiri jednadžbe s četiri nepoznanice, koji očito ima jedno trivijalno rješenje: $a = b = c = d = 0$. Međutim, taj nas slučaj ne zanima, jer ne određuje jednadžbu konkretne ravnine. Da bi postojalo još jedno rješenje, dovoljno je da matrica sustava bude singularna, tj. da vrijedi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Primijetimo da smo dobili uvjet po elementima pravaca p_1 i p_2, i to je nužan i dovoljan uvjet kojeg moraju zadovoljavati dva pravca (zadana po jednom točkom i vektorom smjera) da bi se međusobno sijekli. Dakle, ako želimo provjeriti sijeku li se dva kanonskim jednadžbama zadana pravca, možemo to učiniti provjeravanjem gornjeg determinantnog uvjeta.

(3) pravci su mimoilazni: kažemo da su dva pravca u prostoru **mimoilazna** ako nisu paralelni niti se sijeku.

Napomena: Ostaje nejasno kako izračunati točku presjeka dvaju pravaca koji se sijeku. Primijetimo da je kanonski oblik jednadžbe pravca zapravo sustav od dvije jednadžbe. Stoga, ako su zadana dva pravca p_1 i p_2 svojim kanonskim jednadžbama, dovoljno je iz tih dviju jednadžbe-sustava uzeti tri (od ukupno četiri moguće) jednadžbe. Rješavajući tako dobiveni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice dobit ćemo traženu točku presjeka.

Napomena: Sličan nužan i dovoljan uvjet koji nam omogućuje da provjerimo sijeku li se dva pravca možemo napisati i u slučaju da su pravci zadani kao presjeci ravnina:

$$p_1 \ldots \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$p_2 \ldots \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}.$$

U tom slučaju mora postojati netrivijalan presjek ove četiri ravnine (to je tražena točka), tj. matrica sustava mora biti netrivijalna, pa imamo ovaj nužan i dovoljan uvjet

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

1.8 Međusobni položaj pravca i ravnine

Zadaci često kombiniraju elemente pravca i ravnine, tj. njihov međuodnos. Stoga ćemo proučiti dva najčešća slučaja međuodnosa pravca p s nepoznatim vektorom smjera $\vec{s}$ i ravnine π sa zadanim vektorom normale $\vec{n}$:

(1) pravac je paralelan s ravninom ili se nalazi u ravnini: $\vec{s}$ i $\vec{n}$ su ortogonalni, tj. da vrijedi $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$

(2) pravac je okomit na ravninu: $\vec{s}$ i $\vec{n}$ su kolinearni, tj. vrijedi $\vec{s} = \vec{n}$ (to naravno općenito ne vrijedi za sve kolinearne vektore. Međutim, nas ovdje ne zanima duljina vektora, pa možemo uzeti da je $\vec{s}$ upravo jednak vektoru $\vec{n}$.)

Ista se pravila mogu primijeniti i ako je zadan pravac (vektor smjera $\vec{s}$ je poznat), a traži se jednadžba ravnine (vektor $\vec{n}$ je nepoznat).

Naravno, postoji i slučaj kada pravac siječe ravninu. Ovdje ćemo komentirati dva slučaja:

(1) pravac je zadan parametarski jednadžbama $x = x_0 + ta$, $y = y_0 + tb$, $z = z_0 + tc$. Uvrstimo opće koordinate x, y i z u jednadžbu ravnine - dobit ćemo konkretnu vrijednost za parametar t, koju potom opet uvrštavamo u parametarski oblik jedadžbe pravca. Naposlijetku dobivamo koordinate točke presjeka.

(2) pravac je zadan kanonskom jednadžbom $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$. U tom slučaju možemo izjednačavanjem ovih jednadžbi s realnim parametrom t doći do parametarskog oblik jednadžbe pravca: iz $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t$ slijedi $x = x_0 + ta$, $y = y_0 + tb$, $z = z_0 + tc$ i slučaj je sveden na prethodni.

Najbolje je ove odnose komentirati na konkretnim primjerima:

Primjer 1

Nađite jednadžbu pravca koji je okomit na ravninu $x + y + z = 0$, a prolazi sjecištem ravnina $x = 3$, $y = 4$, $z = -1$.

Rješenje:

Tražimo pravac p, a da napišemo njegovu kanonsku jednadžbu dovoljan nam je vektor smjera $\vec{s}$ i neka (proizvoljna) točka T_0 tog pravca. Prema gornjim uputama možemo uzeti da je $\vec{s} = \vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, tj. da je $\vec{s}$ jednak vektoru normale ravnine $x + y + z = 0$. Kako pravac prolazi sjecištem zadanih ravnina, možemo za točku T_0 uzeti upravo točku iz sjecišta, dakle točku koja zadovoljava sve tri jednadžbe $x = 3$, $y = 4$, $z = -1$, a to je očito točka $(3, 4, -1)$. Sada je lako napisati jednadžbu pravca p: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{1}$.

Primjer 2

Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravce $p_1 \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-4}{2}$ i $p_2 \dots \frac{x-3}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-3}{1}$.

Rješenje:

Za jednadžbu ravnine potrebna su nam dva elemente: vektor smjera $\vec{n}$ i neka (proizvoljna) točka T_0 te ravnine. Kako ravnina sadrži pravce p_1 i p_2, to je $\vec{n}$ ortogonalan i na $\vec{s_1}$ (vektor smjera pravca p_1) i na $\vec{s_2}$ (vektor smjera pravca p_2), pa ga možemo definirati kao vektorski produkt tih vektora:

$\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$, tj.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

odakle nakon sređivanja izraza imamo $\vec{n} = -6\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$. Za točku T_0 ravnine možemo uzeti bilo koju točku na pravcu p_1 (jer se pravac p_1 nalazi u ravnini, pa to svojstvo ima i svaka točka na njemu), recimo točku iz njene kanonske jednadžbe: $T_0(1, -2, 4)$. Sada možemo napisati jednadžbu ravnine: $-6(x-1) - 5(y+2) + 3(z-4)$, što nakon sređivanja postaje $6x + 5y - 3z + 16 = 0$, i to je tražena jednadžba.

Ova se metoda ne može primijeniti direktno ako su vektori smjera zadanih pravaca kolinearni, jer ćemo tada za vektor smjera dobiti nul-vektor. Stoha je potrebno uzeti dva nekolinearna (linearno nezavisna) vektora iz ravnine i tek tada vektor smjera možemo definirati kao njihov vektorski produkt.

Primjer 3

Odredite jednadžbu ravninu koja sadrži pravce $p_1 \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ i $p_2 \dots \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{4}$.

Rješenje:

Ovdje očito imamo kolinearne (čak i jednake) vektore smjera, pa možemo uzeti samo jednog od njih. Vektor normale $\vec{n}$ ravnine koju tražimo bit će dakle ortogonalan na $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Da bismo potpuno odredili $\vec{n}$, treba nam još jedan vektor ravnine. Međutim, kako se i p_1 i p_2 nalaze u ravnini, možemo uzeti po jednu točku sa svakog pravca i tako formirati vektor v ravnine: uzmimo $T_1(1, 1, 1)$ s pravca p_1 i $T_2(-1, -1, -1)$ s pravca p_2 i i definirajmo $\vec{v} = \overrightarrow{T_1T_2}$ Imamo $\vec{v} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, pa je sada $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{v}$, što nakon sređivanja daje $\vec{n} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Kao točku T_0 ravnine možemo uzeti npr. T_1, pa jednadžba ravnine glasi $2(x-1) - 4(y-1) + 2(z-1) = 0$, što nakon sređivanja daje $x - 2y + z = 0$, i to je tražena jednadžba.

Primjer 4

Odredite jednadžbu ravnine koja je okomita na ravninu $\pi \dots 2x + 3y - z = 4$ i sadrži pravac $p \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$.

Rješenje:

Označimo vektor normale ravnine koju tražimo s $\vec{n}$, vektor normale ravnine π s $\vec{n_1}$, a vektor smjera pravca p sa $\vec{s}$. Kako tražimo ravninu koja je okimita na ravninu π, to znači da je i $\vec{n} \perp \vec{n_1}$. Također, mora biti $\vec{n} \perp \vec{s}$ (jer se pravac p nalazi u ravnini kojoj je $\vec{n}$ vektor normale, a $\vec{n}$ je ortogonalan na svaki vektor te ravnine, pa tako i $\vec{s}$), pa je očito $\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{s}$. Dalje se zadatak rješava kao i u prethodnim primjerima.

Primjer 5

Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T_0(3,-2,1)$ i sadrži pravac $p \ldots x = 3 - t,\ y = 2 + t,\ z = t$.

Rješenje:

Iz parametarske jednadžbe možemo lako očitati vektor smjera $\vec{s}$, kao i točku T na pravcu p (usporedi s općim oblikom parametarske jednadžbe pravca): $\vec{s} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $T(3,2,1)$. Kako nam za jednadžbu ravnine treba vektor normale $\vec{n}$, njega ćemo slično kao u prethodnim primjerima definirati kao $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{v}$, gdje je $\vec{v}$ pomoćni vektor u ravnini definiran s $\vec{v} = \overrightarrow{T_0T} = 4\vec{j}$. Dalje se zadatak rješava analogno prethodnim primjerima.

Primjer 6

Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravce

$$p_1 \ldots \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{cases} \quad \text{i}$$

$$p_2 \ldots \begin{cases} -5x + y + z &= 0 \\ x + y - z + 2 &= 0 \end{cases} .$$

Rješenje:

Najprije moramo provjeriti da li se ti pravci opće sijeku, što možemo koristeći već poznatu formulu: provjeravamo da li vrijedi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Razvojem ove determinante po četvrtom stupcu odmah se vidi da je ona zaista jednaka nuli, što je dokaz da se pravci sijeku, pa postoji jedinstvena ravnina koja ih sadrži.

Najprije odredimo vektor smjera $\vec{s_1}$ pravca p_1. Kako je taj pravac zadan kao presjek dviju ravnina, $\vec{s_1}$ možemo definirati kao vektorski produkt vektora normala ravnina koje ga definiraju:

$$\vec{s_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Analogno izračunamo vektor smjera $\vec{s_2}$ pravca p_2. Kako se ova dva vektora nalaze u ravnini koju tražimo, po uobičajenom postupku definiramo vektor normale $\vec{n}$ te ravnine kao vektorski produkt vektora $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$. Kao točku ravnine koja nam je potrebna da napišemo jednadžbu ravnine možemo uzeti npr. bilo koju točku s pravca p_2, dakle bilo koju točku koja zadovoljava sustav

$$-5x + y + z \quad = \quad 0$$

$$x + y - z + 2 = 0.$$

Primjer 7

Neka su zadani pravci

$p_1 \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$,

$p_2 \ldots \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ i

$p_3 \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$,

te neka ravnina π sadrži pravce p_1 i p_2. Nađite $\pi \cap p_3$.

Rješenje:

Kao i u prethodnim primjerima možemo naći vektor normale $\vec{n}$ ravnine π kao $\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$, gdje su $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ vektori smjera pravaca p_1 i p_2, redom. Dobiva se $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Kao točku π možemo uzeti npr. točku $(0, 1, 0)$ s pravca p_1, pa za jednadžbu ravnine π dobivamo $x + y + z - 1 = 0$. Sada treba još naći presjek ove ravnine s pravcem p_3, kojeg ćemo zapisati u parametarskom obliku: $x = t + 1$, $y = -t$, $z = 0$. Uvrštanjem ovih jednadžbi u jednadžbu ravnine π dobivamo identitet $0 = 0$, što znači da su sve točke pravca p_3 ujedno i točke ravnine π, tj. pravac p_3 se nalazi u ravnini π: $\pi \cap p_3 = p_3$.

Zadaci sa rokova:

1. Nađite jednadžbu ravnine koja sadrži pravce $p_1 \ldots \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{4}$ i $p_2 \ldots \frac{x+7}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+4}{4}$.

2. Nađite jednadžbu ravnine koja sadrži pravce $p_1 \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{5}$ i $p_2 \ldots \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{10}$.

3. Odredite jednadžbu ravnine koja je okomita na ravninu $\pi \ldots 2x + 3y - z + 5 = 0$ i sadrži pravac $p \ldots \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+2}{-4}$.

4. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži točke $T_1(1, 2, 0)$ i $T_2(2, 3, 1)$, a okomita je na ravninu $2x + 3y - 4z = 0$.

5. Nađite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac
$p_1 \ldots \begin{cases} 3x + y - z + 5 = 0 \\ -x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$, a paralelna je s pravcem
$p_2 \ldots \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ x + 3y \quad = 0 \end{cases}$.

6. Neka su zadani pravci $p_1 \ldots \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-7}{0}$, $p_2 \ldots \frac{x+\sqrt{2}}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+\sqrt{2}}{1}$, $p_3 \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+7}{5}$, te neka ravnina π sadrži pravce p_1 i p_2. Nađite $\pi \cap p_3$.

7. Neka ravnina π sadrži točku $A(0, -1, 0)$ i pravac $p_1 \ldots \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}$. Na pravcu $p_2 \ldots \frac{x+4}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ odredite točku koja leži u ravnini π.

1.9 Dodatne konstrukcije

Ponekad se zadaci najlakše rješavaju dodatnim konstruiranjem pomoćnih objekata, kao u sljedećem primjeru.

Primjer 8

Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T_0(3,-2,-4)$, usporedan je s ravninom $3x-2y-3z-7=0$ i siječe pravac $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

Rješenje:

Ideja rješenja sastoji se u sljedećem: kroz točku T_0 povući ćemo ravninu π_1 paralelnu s ravninom π i izračunati presjek te ravnine s pravcem p - novodobivena točka T_1 biti će druga točka na pravcu kojeg tražimo. Zajedno s točkom T_0 taj podatak nam je dovoljan da napišemo jednadžbu traženog pravca.

Ako s $\vec{n_1}$ označimo vektor normale ravnine π_1, onda mora biti $\vec{n_1}=\vec{n}$, gdje je $\vec{n}=3\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ vektor normale ravnine π. Dobije se sljedeća jednadžba za π_1: $3x-2y-3z-25=0$. Ako kanonsku jednadžbu pravca $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$ napišemo u parametarskom obliku $x=3t+2$, $y=-2t-4$, $z=2t+1$, onda ćemo uvrštanjem ovih koordinata u jednadžbu ravnine π_1 dobiti $t=2$, što daje točku presjeka $T_1(8,-8,5)$. Sada koristimo formulu za jednadžbu pravca korz dvije točke (u našem slučaju T_0 i T_1) i dobivamo rješenje: $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$.

Zadaci sa rokova:

1. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T_0(3,4,5)$, usporedan je s ravninom danom jednadžbom $x+y-z+\sqrt{2}=0$ i siječe pravac $\frac{x-5}{-1}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z-11}{5}$.
2. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T_0(5,6,7)$, usporedan je s ravninom danom jednadžbom $4x-2z+\sqrt{2}=0$ i siječe pravac $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{0}$.
3. Odredite zajedničku okomicu na pravce $p_1\ldots\frac{x+5}{1}=\frac{y+6}{-1}=\frac{z-7}{2}$ i $p_2\ldots\frac{x}{-1}=\frac{y-31}{2}=\frac{z+4}{0}$.

1.10 Ortogonalna projekcija i simetrični objekt

1.10.1 Ortogonalna projekcija točke na pravac

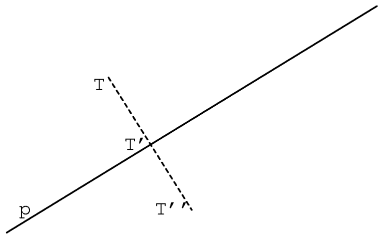
Želimo pronaći točku T' na zadanom pravcu p koji je ortogonalna projekcija neke fiksne točke prostora T. Problem rješavamo tako da kroz točku T povučemo ravninu π okomitu na pravac p - presjek te ravnine i pravca p biti će tražena točka T'. Povezano s ovim problemom je i pronalaženje simetrične točke T'' točki T obzirom na pravac p. Da bismo pronašli točku T'' koristimo se jednostavnom identitom iz teorije vektora: $\overrightarrow{TT''}=2\overrightarrow{TT'}$, odakle odmah izlaze koordinate točke T'' (drugim riječima, T' je polovište dužine $\overline{TT''}$):

Primjer 1 Odredite ortogonalnu projekciju točke $A(1,2,3)$ na pravac

$$p\ldots\begin{cases} x+y+4z+30=0 \\ -x-3y-2z-26=0 \end{cases}.$$

Rješenje:

Tražimo ravninu okomitu na zadani pravac kroz točku A. Ako sa $\vec{n}$ označimo vektor normale te ravnine, a s $\vec{s}$ vektor smjera pravca, onda je $\vec{n}=\vec{s}$. Kako je pravac zadan kao presjek dvaju ravnina, mora biti $\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$, gdje su $\vec{n_1}$ i $\vec{n_2}$ vektori normale ravnina koji definiraju zadani pravac, redom. Dakle, imamo



Slika 1.12: Ortogonalna projekcija točke na ravninu

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix},$$

tj. $\vec{n} = 10\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, pa jednadžba ravnine okomite na zadani pravac glasi $10(x-1) - 2(y-2) - 2(z-3) = 0$, što nakon sređivanja daje $5x - y - z = 0$. Tražimo presjek ove ravnine s pravcem zadanim u zadatku. Kako je pravac zadan i sam kao presjek dviju ravnina, to točku presjeka A' (to je točka koju tražimo) možemo dobiti rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} 5x - y - z &= 0 \\ x + y + 4z &= -30 \\ -x - 3y - 2z &= 26. \end{aligned}$$

Dobiva se jedinstveno rješenje $x = -2$, $y = -4$, $z = -6$, i to su koordinate točke A'.

Primjer 2

Odredite točku simetričnu ishodištu s obzirom na pravac dan jednadžbom $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

Rješenje:

Ppstupamo kao u prethodnom primjeru - nalazimo ravninu kroz ishodište okomitu na zadani pravac, što znači da je $\vec{n} = \vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, pa je jednadžba te ravnine dana s $x + 2y - 3z = 0$. Presjek zadanog pravca s tom ravninom dobije se nakon što pravac zapišemo u parametarskom obliku - dobije se točka $T'(\frac{5}{2}, 1, \frac{3}{2})$ - to je ortogonalna projekcija ishodišta na zadani pravac. Međutim, nama treba točka $T''(x, y, z)$, simetrična točka točki O u odnosu na točku T'. Sa slike 1.13. jasno je da vrijedi $\overrightarrow{OT''} = 2\overrightarrow{OT'}$, odakle izjednačvanjem koeficijenata uz koordinatne vektore odmah odbivamo rješenje: $T''(5, 2, 3)$.

Zadaci sa rokova:

1. Neka je pravac p zadan ravninama $\pi_1 \ldots 3x + 2y - z - 5 = 0$ i $\pi_2 \ldots -6x - y + 2z + 10 = 0$. Odredite ortogonalnu projekciju toč ke $T(-5, 2, 0)$ na pravac p.

2. Neka je zadan pravac $p \ldots \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$ i točka $M(1, 2, 0)$.
   Odredite točku M' simetričnu točki M s obzirom na pravac p.

3. Neka je pravac p zadan ravninama $\pi_1 \ldots x + 7y + z + 13 = 0$ i $\pi_2 \ldots 3x + y - z - 1 = 0$. Odredite točku simetričnu točki $A(2, 0, -6)$ s obzirom na pravac p.

1.10.2 Ortogonalna projekcija pravca na ravninu

Želimo pronaći pravac p', ortogonalnu projekciju danog pravca p na danu ravninu π. Postoje dva uobičajena načina za rješavanje ovog problema:

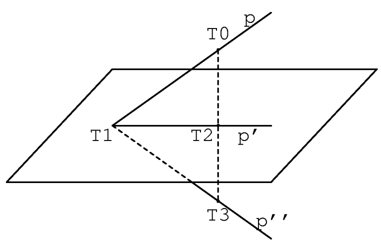
(1) dodatna konstrukcija - konstruiramo ravninu π_1 koja prolazi pravcem p, a okomita je na ravninu π. Presjek te ravnine s ravninom π bit će traženi pravac p'. Ako s $\vec{n_1}$ označimo vektor normale ravnine π_1, s $\vec{n}$ vektor normale ravnine π, a s $\vec{s}$ vektor smjera pravca p, onda je jesno da mora biti $\vec{n_1} = \vec{n} \times \vec{s}$. Kao točku u ravnini π_1 koja nam je još potrebna da napišemo njenu jednadžbu možemo uzeti bilo koju točku pravca p.

(2) postojeća konstrukcija - izračunamo točku T_1 presjeka pravca p i ravnine π. Odaberemo proizvoljnu točku T_0 na pravcu p koja se ne nalazi u ravnini π i nađemo njenu ortogonalnu projekciju T_2 na ravninu π tako da povučemo pravac okomit na π kroz T_0 - presjek tog pravca i ravnine π bit će točka T_2. Točke T_1 i T_2 određuju traženi pravac p', ortogonalnu projekciju pravca p na ravninu π.

Uz ovaj problem javlja se i problemi nalaženja simetrične slike zadanih objekata obzirom na danu ravninu π:

(1) simetrična točka zadane točke T:

(2) simetričan pravac zadanog pravca p:



Slika 1.13: Ortogonalna projekcija pravca na ravninu

Primjer 1

Nađite ortogonalnu projekciju pravca $p \ldots \left\{ \begin{array}{r} y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right.$ na xy ravninu.

Rješenje:

Želimo povući ravninu π okomitu na $xy-$ravninu, tj. na ravninu $z = 0$, što znači da će vektor normale $\vec{n}$ ravnine π biti ortogonalan na vektor normale $\vec{n}_3$ ravnine $z = 0$ (a to je vektor $\vec{k}$). Također, činjenica da je pravac p zadan kao presjek dviju ravnina znači da je njegov vektor smjera $\vec{s}$ dan sa $\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$, gdje su $\vec{n_1}$ i $\vec{n_2}$ vektori normale ravnina koje definiraju p. Dobije se da je $\vec{s} = -\vec{k}$. Prema gore opisanom postupku, sada bismo trebali definirati $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{n_3}$. Međutim, dobili bismo nul-vektor! Kako interpretirati ovaj slučaj? Dobili smo da je vektor smjera pravca p kolinearan s vektorom normale ravnine na koju taj pravac želimo ortogonalno projicirati, što znači da je ortogonalna projekcija tog pravca zapravo jednaka točki u kojoj taj pravac probada ravninu $z = 0$ (jer se sve točke tog pravca projiciraju u istu točku - imamo degenerirani slučaj). Dakle, dovoljno je izračunati presjek pravca p i ravnine $z = 0$. No, kako je p i sam zadan kao presjek dviju ravnina, traženu točku možemo dobiti rješavajući sustav

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x + y &= 2 \\ z &= 0, \end{aligned}$$

čije jedinstveno rješenje iznosi $(1, 1, 0)$, i to je tražena projekcija.

Primjer 2

Odredite točku simetričnu točki $A(1, 2, 0)$ s obzirom na ravninu $2x + 3y - 4z + 37 = 0$.

Rješenje:

Potrebno je naći pravac p koji prolazi točkom A, a okomit je na danu ravninu. Vektor smjera $\vec{s}$ tog pravca je jednak vektoru normale ravnine , tj. $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, pa možemo napisati parametarsku jednadžbu pravca p: $x = 2t - 1$, $y = 3t - 2$, $z = -4t$, što nam omogućuje da lako nađemo njegov presjek s ravninom $2x+3y-4z+37 = 0$ - dobije se točka $A'(-3, -5, 4)$, i to je ortoggonalna projekcija točke A na ravninu zadanu u zadatku. Da bismo našli simetričnu točku $A''(x, y, z)$ točki A, koristimo činjenicu da je točka A' polovište dužine $\overline{AA''}$, što vektorski možemo zapisati ovako: $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{AA'}$. Odavjde uvrštanjem koordinata točaka A, A' i A'' odmah izlazi rješenje: $A''(-7, -12, 8)$.

Zadaci sa rokova:

1. Odredite ortogonalnu projekciju pravca $p \ldots \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ na ravninu $\pi \ldots x + y + z = 1$.

2. Odredite točku simetričnu ishodištu s obzirom na ravninu koja sadrži pravce $p_1 \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{2}$, $p_2 \ldots \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{-4}$.

3. Neka je ravnina π razapeta pravcima $p_1 \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ i $p_2 \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$. Odredite točku simetričnu točki $T(2, -11, -4)$ s obzirom na ravninu π.

4. Neka je T točka simetrična točki $A(1, 2, 3)$ s obzirom na $z-$os. Odredite točku simetričnu točki T s obzirom na ravninu $\pi \ldots x - y + z = 0$.

5. Pravcu $p \ldots \frac{x}{\pi} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ nađite simetričan pravac s obzirom na ravninu $\pi \ldots x + y + z = 1$. Izračunajte kut između tih pravaca.